



**Zadania na XVI Podkarpacki Konkurs Matematyczny  
im. Franciszka Lejona  
Poziom I**

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)

Finał

23 kwietnia 2016 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Boki prostokąta mają długość 12 i 16. W każdy trójkąt na który przekątna dzieli ten prostokąt, wpisano okrąg. Oblicz odległość środków tych okręgów.
2. Liczy dodatnie  $a, b, c$  spełniają warunek  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$ .  
Wykaż, że  $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \leq \frac{1}{3}$ .
3. Dany jest trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $|AB| = 16$  i  $|AC| = |BC| = 10$ . Przez wierzchołek  $C$  tego trójkąta poprowadzono trzy proste przecinające bok  $AB$  w punktach  $K, L, M$ . Proste te podzieliły kąt trójkąta przy wierzchołku  $C$  na cztery kąty przystające. Wyznacz długości odcinków  $|CK|, |CL|, |CM|$ .
4. Rozwiąż układ równań:  
$$\begin{cases} \sqrt[3]{y-x} = 1 \\ \sqrt[3]{z-y} = 1 \\ (x-1)^3 + (y-2)^3 + (z-3)^3 = 3 \end{cases} .$$
  
Sprawdź, czy rozwiązania układu spełniają warunek:  $x^4 \cdot y \cdot z^{-2} = y$ .
5. Ogrodnik ma posadzić drzewka, których jest mniej niż 1000. Gdyby sadził je rzędami po 37 sztuk w każdym rzędzie, to zostanie mu 8 drzewek. Jeśli zaś posadzi po 43 sztuki w każdym rzędzie, to zostanie mu 11 drzewek. Ile drzewek ma ogrodnik do posadzenia?

Powodzenia!